國中基本學力測驗量尺分數的計算

題庫發展組

常常有家長與老師來詢問我們有關基本學力測驗量尺分數的意義與計算的方式，有關量尺分數的建立意義與理論的介紹，已經在許多文章中有相關的說明，有興趣的家長與老師可以參考《飛揚》第四期的〈國中基本學力測驗分數的意義與使用〉、第六期的〈基本學力測驗的分數〉，以及《九十年國民中學學生基本學力測驗實施說明會研習手冊》中的〈基本學力測驗分數的建立〉，相信這些文章可以讓大家對於量尺分數背後所代表的意義與如何正確使用量尺分數，有更深一層的了解。而本篇文章將針對基本學力測驗量尺分數的計算方式，利用一個模擬的數據與逐步說明，來讓大家從實作的角度來理解量尺分數的涵義。

國民中學學生基本學力測驗推動工作委員會針對基本學力測驗量尺分數的計算，自行開發了一套量尺計分的程式，除了量尺分數的計算外，還提供了測量標準誤、測驗信度等統計數據，提供測驗專家來評估分數的適切性。為了保障考生的權益，選用了較複雜的演算法來確保程式中數值計算的精確度，因此，為了讓大家比較容易了解基本學力測驗量尺分數的計算，本篇文章將簡化這個程序，僅聚焦在基本學力測驗量尺分數轉換計算方式的簡介上。

表一所提供的數據是一個模擬的三十萬考生的數據，題本題數的設定是 40 題，所以考生的答對題數 x 的可能值為 0 到 40，表中 $p(x)$ 代表的是三十萬考生中答對題數為 x 的比率，$\hat{p}(x)$ 為 beta-binomial 分配估計下的答對題數為 x 的比率（計算方法請參閱附錄說明），圖一中長條的高度顯示的是 $p(x)$ 值，而折線上的 O 點顯示的是 $\hat{p}(x)$ 值。基本上，在像基本學力測驗這樣的大型測驗，由於考生人數較多，$p(x)$ 與 $\hat{p}(x)$ 的值相差不大，從圖一就看得出來。如果在考生人數不多的情況下來計算基本學力測驗量尺分數時，$\hat{p}(x)$ 的估計就會變得比較重要。以下就是我們計算基本學力測驗量尺分數的詳細步驟：

步驟一：

將答對題數 x 的值透過正弦反函數進行轉換

$$c(x)=\frac{1}{2}\left\{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{K+1}}\right)+\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x+1}{K+1}}\right)\right\}$$

其中 K 為題數（在本例中為 40）。

表一　模擬三十萬考生數據

答對題數	0	1	2	3	4	5	6
人數	9	54	148	265	463	736	979
$p(x)$	0.00003	0.00018	0.00049	0.00088	0.00154	0.00245	0.00326
$\hat{p}(x)$	0.00003	0.00017	0.00042	0.00091	0.00155	0.00226	0.00329
量尺分數	1	1	1	1	1	1	1

答對題數	7	8	9	10	11	12	13
人數	1299	1715	2069	2571	2959	3448	3963
$p(x)$	0.00433	0.00572	0.0069	0.00857	0.00986	0.01149	0.01321
$\hat{p}(x)$	0.00442	0.0056	0.007	0.00846	0.01	0.01173	0.01333
量尺分數	1	1	1	3	4	6	7

答對題數	14	15	16	17	18	19	20
人數	4664	5130	5683	6266	6921	7371	8380
$p(x)$	0.01555	0.0171	0.01894	0.02089	0.02307	0.02457	0.02793
$\hat{p}(x)$	0.01504	0.01695	0.01917	0.02089	0.02289	0.02527	0.02733
量尺分數	9	11	12	13	15	16	18

答對題數	21	22	23	24	25	26	27
人數	8755	9239	9949	10627	11128	11664	12327
$p(x)$	0.02918	0.0308	0.03316	0.03542	0.03709	0.03888	0.04109
$\hat{p}(x)$	0.02912	0.03118	0.03307	0.035	0.03694	0.03866	0.04033
量尺分數	19	21	22	24	25	27	28

答對題數	28	29	30	31	32	33	34
人數	12484	13015	13357	13281	13469	13800	13927
$p(x)$	0.04161	0.04338	0.04452	0.04427	0.0449	0.046	0.04642
$\hat{p}(x)$	0.04175	0.04317	0.04457	0.04521	0.04584	0.04618	0.04592
量尺分數	30	31	33	35	37	38	40

答對題數	35	36	37	38	39	40
人數	13548	13269	12620	11599	9796	7053
$p(x)$	0.04516	0.04423	0.04207	0.03866	0.03265	0.02351
$\hat{p}(x)$	0.04571	0.04363	0.04175	0.03828	0.03316	0.02381
量尺分數	42	45	47	50	53	60

步驟二：

計算 $c(x)$ 在 $\hat{p}(x)$ 加權下的平均數

$$\mu(c(x))=\sum_{x=0}^{K} c(x)\hat{p}(x)$$

步驟三：

將 $c(x)$ 的值線性轉換到一個在 $\hat{p}(x)$ 加權下平均數為 30 分，滿分為 60 分的尺度上：

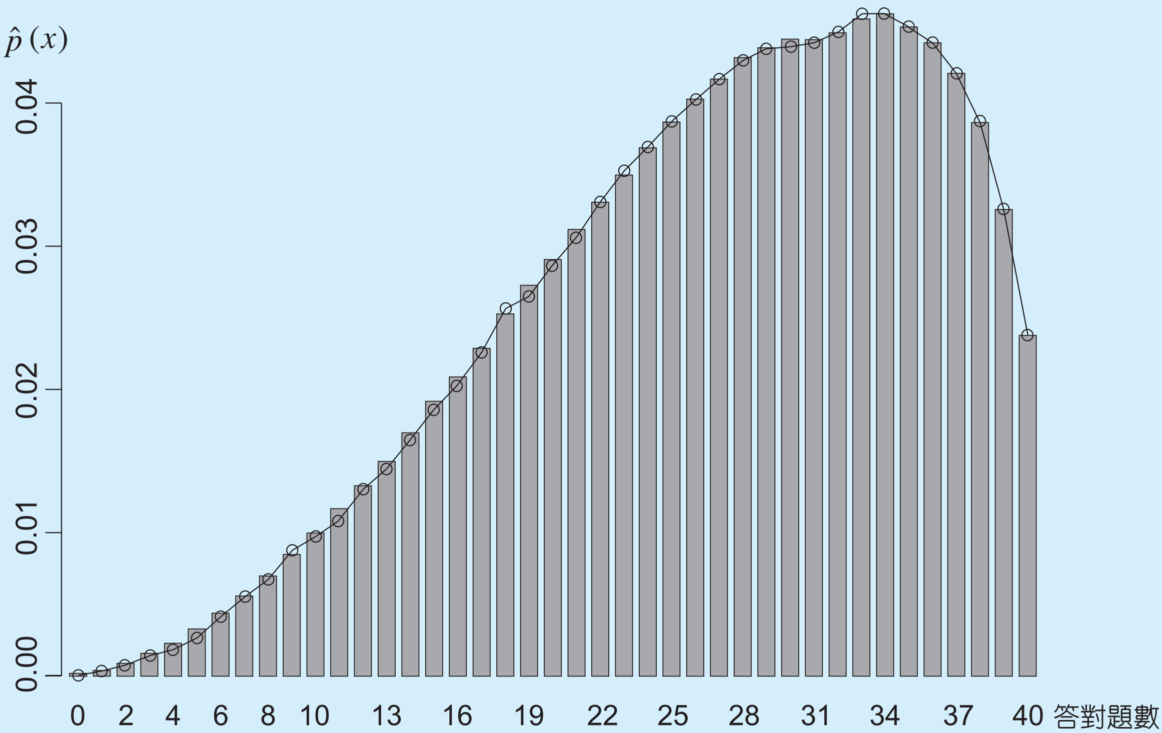
$$s(x)=\{c(x)-\mu(c(x))\}\cdot f+30$$

其中 $f=\dfrac{30}{c(K)-\mu(c(K))}$ 。

步驟四：

將 $s(x)$ 四捨五入後並將小於 1 的值設定成 1 後，即可得到最後的量尺分數。

基本學力測驗量尺分數的理論看起來是很複雜，但是計算的步驟是不是比想像中簡單許多呢！



圖一

附錄：$\hat{p}(x)$ 的計算

$\hat{p}(x)$ 的值是來自於廣義的 (extended) beta-binomial 分配，此分配有上限與下限兩種模式，但由於基本學力測驗題本的難度設定在中間偏易，因此基本學力測驗量尺分數在計算上多採用下限模式，所以我們也僅就下限模式計算 $\hat{p}(x)$ 的方式做介紹，對上限模式有興趣的人可以參考曾尹俊等人的論文〈九十年度臺灣地區中學生基本學力測驗量尺計分計劃系統簡介〉，再參考本文中下限模式相關的計算部分進行調整即可。下限的 beta-binomial 分配的數學式如下：

$$g^{(L)}(\tau)=\begin{cases} 0 & if \quad \tau \in [0,\mathrm{L}] \\ \dfrac{(1-L)^{1-\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \times (\tau-L)^{\alpha-1} \times (1-\tau)^{\beta-1} & if \quad \tau \in [\mathrm{L},1] \end{cases}$$

其中 τ 代表的是考生能力值的分配，$\hat{p}(x)$ 就是在估計當考生能力值的分配屬於下限的 beta-binomial 分配時，考生中答對題數為 x 的機率，如下式所示：

$$\hat{p}(x)=\int_0^1 prob(\mathrm{X}=x|\tau)\times g^{(L)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

其中 $prob(\mathrm{X}=x|\tau)$ 為答對機率為 τ 的二項分配。從上面兩個列式可以很容易的發現，只要知道式子 $g^{(L)}(\tau)$ 中參數 L、α 與 β 的值，那麼 $\hat{p}(x)$ 就可以很容易的透過蒙地卡羅法求得。詳細的演算法如下所列：

步驟一：

估計參數 L、α 與 β 的值

令

$$E_1=\frac{1}{K}\sum_{x=1}^{1} x$$

$$E_2=\frac{1}{K(K-1)}\sum_{x=2}^{K} x(x-1)$$

$$E_3=\frac{1}{K(K-1)(K-2)}\sum_{x=3}^{K} x(x-1)\,x(-2)$$

那麼就可分別得到參數 L、 α 與 β 的估計值如下：

$$\hat{L}=\frac{E_3\times(E_1+E_2)-E_2^2\times(2-E_1)-E_1^2\times(2E_3-E_2)}{E_1^2\times(2E_1-E_2)+2E_2^2-3E_1E_2-E_3\times(E_1-1)}$$

$$\hat{\alpha}=\frac{(E_1+\hat{L}E_1-\hat{L}-E_2)\times(\hat{L}-E_1)}{(E_2-E_1^2)\times(\hat{L}-1)}$$

$$\hat{\beta}=\frac{(E_1+2\hat{L}E_1-\hat{L}-E_2)\times(E_1-1)}{(E_2-E_1^2)\times(\hat{L}-1)}$$

步驟二：

分別對每一個 x 的可能值執行下列的子步驟：

子步驟一：

產生1000筆服從 beta 分配（參數 α 設定為 $\hat{\alpha}$ 、參數 β 設定為 $\hat{\beta}$ ）的隨機變數（以 ρ 表示）。

註：筆數可自行選擇，筆數越高結果越精確。

子步驟二：

對這些隨機變數以 $L+(1-L)\ \rho$ 進行線性轉換來得到服從下限的 beta-binomial 分配的 τ 。

子步驟三：

分別以這1000筆隨機變數 τ 當做二項分配中的答對機率值，計算答對題數 x 的機率

（以q_i表示，i=1...1000）。

$$q_i=\binom{K}{x}\tau^x(1-\tau)^{K-x}$$

用q_i的平均值來估計$\hat{p}(x)$

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}q_i$$